

KONTROL OPTIMUM LQR PADA MODEL *LOVE AND HAPPINESS* YANG MELIBATKAN PIHAK KETIGA

Khozin Mu'tamar^{1,a}, Supriadi Putra^{1,b}, Leli Deswita^{1,c}, Imran M^{1,d}

¹Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Riau

^akhozin.mutamar@unri.ac.id

^bsputra@unri.ac.id

^cdeswital@yahoo.com

^dmimran@unri.ac.id

sputra@unri.ac.id

ABSTRAK

Artikel ini membahas mengenai penerapan kontrol optimal berupa *linear quadratic regulator* (LQR) pada masalah model *Love and Happiness* Romeo dan Juliet yang melibatkan pihak ketiga. Fokus masalah yang dibahas adalah kondisi model yang tidak stabil. Optimal kontrol digunakan untuk mengontrol state yang mewakili Romeo sebagai bentuk *treatment* agar Romeo melepaskan hubungan dengan pihak ketiga. Pada akhir paper, akan dilakukan simulasi untuk melihat hasil dari penerapan kontrol pada masalah ini.

Kata Kunci: Model love and happiness dengan affair, Linear Quadratic Regulator, Optimal Control.

ABSTRACT

This article discusses about application of linear quadratic regulator in linear model of Love and Happiness with Affair. This paper focus on model with condition that make its unstable. Optimal control is used to control Romeo as treatment in order Romeo to release his affair. Simulation is given to illustrate design procedure and the result of treatment using LQR.

Key Words: Linear model love and happiness with affair, linear quadratic regulator, optimal control

Pendahuluan

Manusia sebagai makhluk sosial memerlukan interaksi dengan individu lainnya. Interaksi yang dibangun akan berdampak baik secara positif ataupun negatif. Efek interaksi ini secara psikologis dapat diamati dalam wujud kualitas perasaan antara seorang individu dengan individu lainnya. Interaksi yang dilakukan manusia secara langsung dapat mempengaruhi jenis perasaan orang tersebut dan lawan

interaksinya. Fenomena ini dapat dianggap sebagai perubahan suatu keadaan oleh akibat suatu sebab. Analisa masalah berupa pengamatan adanya perubahan keadaan dalam dunia nyata kemudian membentuk persamaan matematis dari masalah yang ada, dikenal dengan pemodelan matematika. Pemodelan ini diharapkan membantu memahami dan menjelaskan fenomena alam ditinjau dalam sudut pandang ilmu matematika.

Fenomena yang cukup terkenal untuk dijadikan bahan kajian adalah kisah Romeo dan Juliet. Kisah ini menggambarkan sepasang kekasih yang saling mencintai. Beberapa model telah dikembangkan untuk menggambarkan kisah mereka. Strogatz [12] merupakan orang yang pertama menyampaikan model tentang kisah ini secara linier. J. Sunday et.al [8] mengembangkan perhitungan model dengan pendekatan komputasi numerik. J. Wauer et.al [9] mengembangkan model yang bergantung kepada waktu. J.C. Sprott [6] mengembangkan model yang melibatkan tiga individu dan menganalisa kestabilannya.

Model yang melibatkan tiga individu menarik untuk dianalisa. Pada model ini memungkinkan Romeo berpaling dari Juliet sepenuhnya dan memilih Affair sebagai pasangannya. Seluruh model yang telah dikembangkan di atas tidak ada yang melibatkan aspek kontrol dalam pembahasannya. Oleh karena itu, fokus dalam artikel ini adalah membahas penerapan kontrol optimum LQR dalam mencegah Romeo untuk bersatu dengan Affair.

Model Linier Love and happiness with Affair

Misalkan didefinisikan $R_J(t)$ sebagai kualitas rasa dari Romeo kepada Juliet, $R_S(t)$ sebagai kualitas rasa dari Romeo kepada Affair, $J(t)$ sebagai kualitas rasa dari Juliet kepada Romeo dan $S(t)$ sebagai kualitas rasa dari Romeo kepada Juliet yang seluruhnya dievaluasi pada waktu t . Pertumbuhan perasaan masing-masing hanya bergantung secara proporsional dengan kualitas perasaan pada saat t . Model linier untuk menggambarkan dinamika perubahan perasaan yang melibatkan ketiga individu dapat dinyatakan sebagai [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_J(t)}{dt} &= aR_J(t) + b(J(t) - S(t)) \\ \frac{dR_S(t)}{dt} &= aR_S(t) + b(S(t) - J(t)) \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= cR_J(t) + bJ(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= eR_S(t) + fS(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dengan a, b, c, d, e, f adalah gaya romantis masing-masing individu yang akan menentukan jenis romantik yang akan terjadi, beberapa di antaranya adalah [6,8]:

1. Saling berhasrat, yaitu ketika pertumbuhan masing-masing dipengaruhi secara positif oleh masing-masing individu.

2. Perasaan yang bertepuk sebelah tangan, yaitu ketika salah satu individu mampu untuk menumbuhkan perasaan sendiri secara positif tetapi lawan jenisnya bertolak belakang.
3. Waspada, yaitu ketika setiap individu hanya menumbuhkan perasaan dalam dirinya melalui perilaku pasangannya.
4. Saling benci, yaitu ketika setiap individu bereaksi negatif terhadap dirinya sendiri dan perilaku pasangannya.

Model *Love and Happiness* di atas merupakan model linier sehingga titik ekuilibriumnya hanya terbatas dua jenis, yaitu trivial di 0 atau di tak hingga pada banyak titik. Jenis kestabilan dari titik ekuilibrium tersebut cukup ditentukan dengan kriteria Routh-Hurwitz, yaitu dengan menentukan tanda dari nilai eigen sistem di atas.

Desain Kontrol Optimum LQR Pada Model Love and Happiness dengan Affair

Pandang kembali persamaan (1) dalam bentuk notasi vektor

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

dengan $\bar{x} = (R_J \ R_S \ J \ S)^T$ dan A adalah matriks 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & -b \\ 0 & a & -b & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & f \end{bmatrix}$$

Sistem kontrol LQR untuk sistem pada persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \quad (2)$$

dengan B adalah matriks kontrol dan $u(t)$ fungsi kontrol yang akan ditentukan nilainya. Nilai kontrol $u(t)$ adalah nilai yang meminimalkan performa indeks $J(\bar{x}, u, t)$

$$J(\bar{x}, u, t) = \bar{x}(T)^T P\bar{x}(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \bar{x}^T(t) Q\bar{x}(t) + u(t) R u(t) dt$$

dimana P , Q , R adalah matriks-matriks pembobot yang merupakan matriks semi-definit positif dan definit positif. Didefinisikan persamaan Hamiltonian

$$H(\bar{x}, u, t) = \frac{1}{2} (\bar{x}^T(t) Q\bar{x}(t) + u^T(t) R u(t)) + \lambda^T(t) (A\bar{x}(t) + Bu(t)) \quad (3)$$

dengan $\lambda(t)$ adalah pengali Lagrange. Nilai dari kontrol $u(t)$ diperoleh dari titik stasioner terhadap $u(t)$ dari persamaan (3) sehingga

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru(t) + B^T \lambda^T(t) = 0$$

atau

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda^T(t) \quad (4)$$

Diferensial $H(\bar{x}, u, t)$ terhadap $\lambda(t)$ akan menghasilkan *state*, yaitu

$$\frac{dH}{d\lambda(t)} = \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t)$$

Diferensial $H(\bar{x}, u, t)$ terhadap $\bar{x}(t)$ akan menghasilkan *costate*, yaitu

$$\frac{dH}{d\bar{x}(t)} = \lambda'(t) = Q\bar{x}^T(t) + \lambda^T A$$

$$\lambda'(t) = -Q\bar{x}(t) - A\lambda^T \quad (5)$$

Misalkan $\lambda(t) = s(t)\bar{x}(t)$ berlaku untuk $t \leq T$ dan $s(T) = P$ [3] maka dengan menggunakan persamaan (2), (4) dan (5) akan diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= s'(t)\bar{x}(t) + s(t)\bar{x}'(t) \\ -Q\bar{x}(t) - A^T s(t)\bar{x}(t) &= s'(t)\bar{x}(t) \\ &+ s(t)A\bar{x}(t) - s(t)BR^{-1}B^T s(t)\bar{x}(t) \end{aligned}$$

$$0 = (s'(t) + s(t)A - s(t)BR^{-1}B^T s(t))\bar{x}(t) + (Q + A^T s(t))\bar{x}(t)$$

Oleh karena $\bar{x}(t) \neq 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} s'(t) + s(t)A - s(t)BR^{-1}B^T s(t) \\ + Q + A^T s(t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

dengan syarat batas $s(T) = P$.

Persamaan (6) disebut dengan persamaan diferensial Riccati.

Persamaan ini membutuhkan komputasi yang rumit. Oleh karena itu, seringkali kontrol dievaluasi pada kondisi *steady-state* dengan kondisi $s'(t) = 0$ sehingga diperoleh persamaan aljabar Riccati [7]

$$s(t)A - s(t)BR^{-1}B^T s(t) + Q + A^T s(t) = 0 \quad (7)$$

Kestabilan Kontrol LQR

Definisi 1 (*Controllable system* [11]). Misalkan diberikan sistem-plant pada (2). Sistem dikatakan dapat dikontrol (*controllable*) jika dan hanya jika

$$\text{rank}(A | B) = n.$$

Teorema 2 (Kestabilan Lyapunov). Misalkan diberikan sistem $x' = f(t, x)$ dengan $f(t, 0) = 0$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $t > t_0$.

Jika terdapat fungsi $V(x)$ yang terdefinisi pada sekitar $x = 0$ dan definite positif pada $t \geq t_0$ maka titik $x = 0$ dikatakan stabil secara Lyapunov.

Bukti. Lihat [4, Hal.99] ■

Teorema 3. Misalkan diberikan sistem-plant (2). Jika sistem-plant tersebut *controllable* maka sistem stabil asimtotik.

Bukti. Oleh karena sistem-plant dapat dikontrol maka ada $u = -BR^{-1}B^T s(t)\bar{x}(t)$ sehingga sistem-plant dituliskan dalam bentuk

$$\bar{x}' = (A - BR^{-1}B^T s(t))\bar{x}$$

Misalkan persamaan Lyapunov diberikan oleh [5, Hal.476]

$$V(x) = \bar{x}^T s \bar{x}$$

akan diperoleh

$$V' = \bar{x}^T s \bar{x} + \bar{x}^T s \bar{x}'$$

sehingga

$$V' = \bar{x}^T \{sA + A^T s - sBR^{-1}B^T s + Q - sBR^{-1}B^T s - Q\} \bar{x}.$$

Pada kondisi *steady-state* berlaku

$$sA + A^T s - sBR^{-1}B^T s + Q = 0$$

maka

$$V' = -\bar{x}^T \{sBR^{-1}B^T s + Q\} \bar{x}.$$

Oleh karena $s > 0$ dan $Q > 0$ maka diperoleh $V' < 0$ sehingga sistem stabil asimtotik. ■

Simulasi Numerik

Perhatikan kembali sistem pada persamaan (1). Sistem yang akan dikontrol adalah salah satu bentuk kasus dimana sistem memiliki titik ekuilibrium tidak stabil. Pada kasus ini $R_S(t)$ dan $S(t)$ berkembang menuju tak hingga sedangkan $R_J(t)$ dan $J(t)$ berkembang menuju negatif tak hingga. Kontrol LQR digunakan untuk mengontrol agar $R_S(t)$ bergerak menuju nol. Oleh karena itu, diperoleh sistem-plant

$$\bar{x}' = A\bar{x} + Bu$$

dengan A dan B adalah

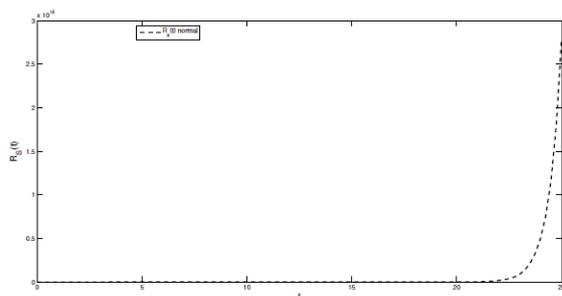
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai matriks Q dapat dipilih menggunakan aturan Bryson[1] sehingga

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

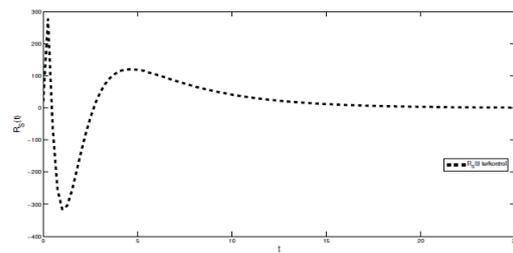
dan $R = 0.1$. Dari data di atas diperoleh bahwa determinan dari matriks A yaitu $\det(A) = 0.0625$ sehingga sistem memiliki titik ekuilibrium tunggal di $(0,0,0,0)^T$. Titik ekuilibrium bersifat tidak stabil karena terdapat nilai eigen dari A positif yaitu $(0.05, 1, 0.73, 0.72)$. Sistem yang diberikan dapat dikontrol karena $\text{rank}(A|B) = 4$. Hasil simulasi ditunjukkan pada gambar berikut ini



Gambar 1: $RS(t)$ tanpa kontrol

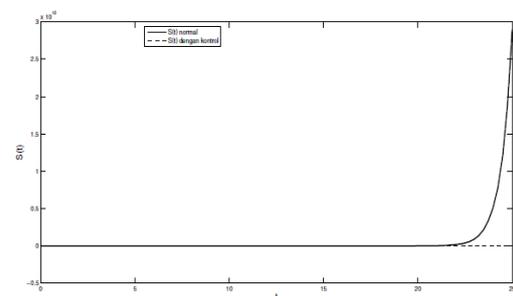
Gambar 1 menunjukkan perilaku dari $R_S(t)$ tanpa adanya kontrol. Oleh karena titik ekuilibrium bersifat tidak stabil maka $R_S(t)$ akan menjauhi titik kestabilan. Jika kontrol optimum LQR

diterapkan maka akan diperoleh hasil seperti pada Gambar 2 berikut

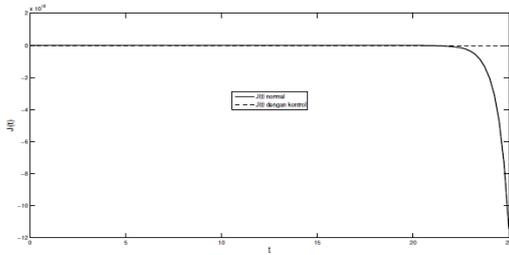


Gambar 2: $RS(t)$ dengan kontrol

Terlihat dari Gambar 2 bahwa dengan adanya kontrol, perkembangan perasaan Romeo kepada Affair dapat ditekan hingga akhirnya sirna. Hal ini tentunya juga secara tidak langsung akan mempengaruhi perkembangan perasaan Affair dan Juliet kepada Romeo. Perbandingan keduanya dapat dilihat pada Gambar 3 dan 4 berikut.



Gambar 3. Perbandingan $S(t)$ dengan dan tanpa kontrol. Dengan pemberian kontrol kepada $R_S(t)$ membuat perkembangan $S(t)$ melambat. Jelas ini dapat terjadi karena perkembangan perasaan Affair kepada Rome dipengaruhi oleh besarnya perasaan Romeo kepada Affair.



Gambar 4. Perbandingan $J(t)$ dengan dan tanpa kontrol. Pemberian kontrol kepada $R_S(t)$ membuat perkembangan $R_S(t)$ melambat. Hal ini akan membuat perkembangan $J(t)$ meningkat karena perkembangan perasaan Romeo kepada Affair menurun. Dengan menurunnya nilai $R_S(t)$ akan membuat berkembangnya nilai $J(t)$.

KESIMPULAN

Hasil simulasi menunjukkan bahwa LQR berhasil diterapkan ke dalam model *Love and Happiness* yang melibatkan pihak ketiga untuk mengontrol salah satu variabel agar stabil asimtotik menuju titik ekuilibrium. Selain itu, dari hasil simulasi tampak bahwa dengan adanya kontrol pada perasaan Romeo kepada Affair dapat membuat perkembangan perasaan tersebut menurun dan akhirnya sirna. Hal tersebut juga akan membuat perkembangan perasaan Affair kepada Romeo menjadi melambat sedangkan perkembangan perasaan Juliet kepada Romeo menjadi meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

- A.E. Bryson and Y.C. Ho., *Applied Optimal Control*. Hemisphere, New York, 1975
- D. Satsangi and A.K. Sinha, Dynamics of Love and Happiness: A Mathematical Analysis. *International Journal Modern Education and Computer Science*. DOI: 10.5815/ijmecs.2012.05.05. Pages 31-37. 2012
- F.J. Lewis and V.L. Syrmos, *Optimal Control, 2nd edition*, John Wiley & Sons, New York, 1995
- F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*, 2nd edition. Springer, Berlin, 1996
- H.K. Khalil, *Nonlinear System*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002
- J.C. Sprott, *Dynamical Models of Love. Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*. 8(2004) 303-314
- J.F. Burl, *Linear Optimal Control H2 and H1 Methods*. Addison-Wesley, California, 1998
- J. Sunday and D.J. Zirra and M. Mijinyawa, A Computational Approach to Dynamical Love Model: The Romeo and Juliet Scenario. *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*. ISSN 2229 - 6107. Pages 10-15. 2012
- J. Wauer, D. Schwarzer, G.Q. Cai, Y.K. Lin, Dynamical models of love with time-varying fluctuations. *Applied Mathematics and Computation*. 188(2007):1535-1548. DOI 10.1016/j.amc.2006.11.026. 2006
- K. Ghosh, Love between Two Individuals in a Romantic Relationship: A Newly Proposed Mathematical Model. The 7th IMT-GT *International Conference on Mathematics, Statistics and its Applications*. 978-974-231-812-3. Pages 97-104. 2011
- K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th edition. Prentice Hall, New York, 2010
- S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering Reading*. Addison-Wesley, 1994.