ANALISIS SISA PEMBAGIAN DARI SIGMA 13*i* PANGKAT *m* DENGAN *i* DARI 1 SAMPAI *n* OLEH PEMBAGI 3 DAN 5

Satria Riki Mustafa[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; satriarikimustafa@gmail.com*
[2]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Mashadi.mat@gmail.com*
[3]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Gemawati.sri@gmail.com*

ABSTRACT

Divisibility of finite sums of power of integers such as $\sum_{i=1}^{n}(2i)^m$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^m$, $\sum_{i=1}^{n}(3i)^m$, $\sum_{k=1}^{n}(4k)^m$, and $\sum_{k=1}^{n}(5k)^m$ has been developed by authors in some books and articles. In this article will be discussion residual of result division $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ divisible by three and vive by using divisibility concept and formulate it based on residual of result division that is listed into tables.

Keywords: *sums of power of intengers, divisibility of numbers, linear combination*

PENDAHULUAN

Konsep pembagian atau keterbagian sudah sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari. Keterbagian atau divisibility adalah sudut pandang matematika yang mempelajari suatu bilangan yang habis oleh bilangan lain. Beberapa peneliti sudah ada meneliti tentang jumlah bilangan bulat berpangkat oleh pembagi tertentu. Beberapa penelitian yang menjadi rujukan akan dijelaskan pada paragraph selanjutnya.

Pada penelitian Gulliver (2010) tentang keterbagian $\sum_{i=1}^{n}(2i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5. Peneltian ini dilakukan dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel dengan m = 1,2,3,…,12 dan n = 1,2,3,…,10. Setelah didaftarkan Guliver melihat pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakeristik keterbagian.

Pada penelitian Gulliver (2010) tentang keterbagian $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^m$ oleh pembagi 10, 3, dan 5. Peneltian ini dilakukan dengan cara yang sama dengan cara Gulliver meneliti tentang keterbagian $\sum_{i=1}^{n}(2i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 yaitu, dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel dengan m = 1,2,3,…,12 dan n = 1,2,3,…,12. Setelah didaftarkan Guliver melihat pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakeristik keterbagian.

Selanjutnya penelitian Gulliver (2012) tentang keterbagian $\sum_{i=1}^{n}(3i)^m$ oleh pembagi 4 dan 5. Peneltian ini dilakukan dengan cara yang sama dengan cara yang sebelumnya yaitu dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel dengan m = 1,2,3,…,12 dan n = 1,2,3,…,15. Setelah didaftarkan Guliver melihat pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat karakeristik keterbagian.

Pada penelitian Suprijanto dan Rusliansyah (2014) tentang keterbagian $\sum_{k=1}^{n}(4k)^m$ oleh pembagi 10, 5, dan 3. Mereka menyatakan keterbagian tersebut dalam dua kasus, yaitu kasus m tetap dan n tetap. Untuk kasus n tetap, sisa pembagian didaftarkan ke dalam bentuk tabel dengan m = 1,2,3,…,12 dan n = 1,2,3,…,10. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan keterbagian tersebut. Untuk kasus n tetap, ditentukan beberapa keterbagian untuk nilai m tertentu.

Selanjutnya penelitian Suprijanto (2015) tentang keterbagian $\sum_{k=1}^{n}(5k)^m$ oleh pembagi 10 dan 3. Penelitian keterbagian tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti sebelumnya dengan membaginya dalam dua kasus, yaitu kasus *m* tetap dan *n* tetap. Untuk kasus *n* tetap, sisa pembagian didaftarkan ke dalam bentuk tabel dengan *m* = 1,2,3,…,10 dan *n* = 1,2,3,…,10. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk *m* dan *n* berikutnya sehingga dapat ditentukan keterbagian tersebut. Untuk kasus *n* tetap, ditentukan beberapa keterbagian untuk nilai *m* tertentu.

Masih banyak bentuk keterbagian lainnya yang ditentukan secara mudah untuk nilai *n* atau *m* tetap dengan melihat jumlah modulo setiap bilangan atau dengan menentukan bentuk rumus paling mendekati untuk nilai *m* tetap. Selain itu, bisa menghitung $\sum_{i=1}^{n}(pi)^m$ untuk p lebih besar dari 3. Untuk *p* = 4 dan *p* = 5 telah diselidiki oleh peneliti sebelumnya.

Dari pembahasan diatas maka penulis akan membahas sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh pembagi 2 dan 3 dengan menggunakan konsep keterbagian serta memformulasikannya berdasarkan tabel sisa pembagian.

Aksoy dan Khamsi (2010) serta Potter (1998) mengatakan barisan adalah suatu fungsi dengan domainnya adalah himpunan *N* bilangan asli, kemudian Iawati dkk (2008) mengatakan bahwa barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Sedangkan Mashadi dan Hadi (2017) mendefenisikan barisan bilangan real sebagai fungsi pada himpunan bilangan asli *N* dengan daerah jelajah termuat didalam himpunan bilangan real *R*. Berdasarkan polanya, barisan bilangan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu barisan aritmatika dan barisan geometri.

Membahas mengenai pembagian maka teorema yang menjadi landasan kita adalah algoritma pembagian. Secara umum dikemukakan bahwa sebuah bilangan bulat dapat dibagi oleh bilangan bulat positif b yang sisanya lebih kecil daripada b. Untuk lebih jelasnya sebagai berikut:

Algoritma pembagian telah dibahas dalam beberapa buku teks antara lain Baker (1984), Burton (2010) dan Koshy (2007) menyatakan bahwa Algoritma Pembagian dijelaskan pada teorema 1 dan sifatnya dijelaskan pada teorema 2.

Teorema 1 (Algoritma Pembagian). Diberikan dua bilangan bulat a dan b, dengan $b > 0$, terdapat bilangan bulat unik q dan r sedemikian hingga,

$$a = qb + r \quad \text{dengan} \quad 0 \leq r < n$$

Bilangan bulat q disebut pembagi dan r disebut sisa dalam pembagian a oleh b. Jika $r = 0$ maka dikatakan *a* habis dibagi oleh *b* dan ditulis *b* | *a*. Jika *r* ≠0 maka ditulis $b \nmid a$.

Teorema 2 (Sifat-sifat keterbagian).Untuk a, b dan c bilangan bulat, berlaku :

(a) $a|0,\ 1|a,\ a|a$.
(b) $a|1$ jika dan hanya jika $a = \pm 1$.
(c) jika $a|b$ dan $c|d$, maka $ac|bd$.
(d) Jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$.
(e) $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = \pm b$.
(f) Jika $a|b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| = |b|$.
(g) Jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk semua bilangan bulat x dan y

Kongruen secara umum adalah adanya kesamaan sifat dari dua benda, dua buah bilangan dikatakan kongruen jika dan hanya jika memiliki sisa yang sama ketika dibagi oleh suatu bilangan bulat. Kekongruenan telah dibahas dalam beberapa buku teks antara lain Burton (2010), Clark (2003) dan Stark(1998).

Definisi 1 (Kekongruenan). Misalkan n bilangan bulat positif, dua bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n, dinotasikan dengan,

$$a \equiv b(mod\ n)$$

jika n membagi $a - b$; yaitu terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $a - b = kn$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini berbentuk studi literatur dengan mempelajari buku teks dan artikel yang berkaitan dengan masalah ini. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh 3 dan 5 kemudian mendaftarkan sisa pembagian tersebut ke dalam bentuk tabel.
2. Menentukan kelas modulo untuk setiap pembagi 3 dan 5 berdasarkan tabel tersebut.
3. Menganalisis sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 dengan menggunakan Teorema Algoritma Pembagian.
4. Mendaftarkan sisa pembagian dari masing-masing pembagi ke dalam bentuk tabel.
5. Menentukan karakteristik keterbagian $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 untuk setiap *n*.

HASIL dan PEMBAHASAN

Untuk menentukan sisa pembagian dari oleh pembagi 3 dan 5 untuk *m*=1 dilakukan dengan cara sebagai berikut:
Pada tahap awal akan dicari sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n} 13i = \frac{13n(n+1)}{2}$ oleh pembagi 3. Dikarenakan $\sum_{i=1}^{n} 13i = \frac{13n(n+1)}{2}$ memiliki penyebut 2 dan akan dibagi oleh pembagi 3, hasil perkalian dari penyebut dan pembagi tersebut adalah 6, maka n yang memungkinkan untuk membagi berada pada kelas modulo 6, $n = 6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3, 6k+4$, $6k+5$ dengan ≥ 0 , *n* Є Z⁺.

Selanjutnya untuk $n = 6k$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{6k(6k+1)}{2}$$
$$= 3.13k(6k+1)$$
$$= 3\big(13k(6k+1)\big) = 3K$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ habis dibagi 3 untuk $n = 6k$

Untuk $n = 6k+1$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{(6k+1)(6k+2)}{2}$$
$$= 13(6k+1)(3k+1)$$
$$= 3(13(6k^2+3k)+4)+1$$
$$= 3K+1$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ tidak habis dibagi 3 untuk $n = 6k+1$.

Untuk $n = 6k+2$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{(6k+2)(6k+3)}{2}$$
$$= 13(3k+1)(6k+3)$$
$$= 3.13(3k+1)\,(2k+1) = 3K$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ habis dibagi 3 untuk $n = 6k+2$.

Selanjutnya untuk *n* = *6k+3, 6k+4 6k+5* dapat dibuktikan dengan cara yang sama sehingga dapat disimpulkan $3 \mid \sum_{i=1}^{n} 13i$ untuk *n* = *6k, 6k+2, 6k+3, 6k+5* dengan $k \geq 0$.

Pada tahap selanjutnya akan dicari sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n} 13i = \frac{13n(n+1)}{2}$ oleh pembagi 5. Dikarenakan $\sum_{i=1}^{n} 13i = \frac{13n(n+1)}{2}$ memiliki penyebut 2 dan akan dibagi oleh pembagi 5, hasil perkalian dari penyebut dan pembagi tersebut adalah 10, maka *n* yang memungkinkan untuk membagi berada pada kelas modulo 10, *n* = *10k, 10k+1,10k+2 10k+3,…, 10k+9* dengan ≥ 0, *n* Є Z⁺.

Selanjutnya untuk *n* = *10k* diperoleh ,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{10k(10k+1)}{2}$$
$$= 5K$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ habis dibagi 5 untuk $n = 10k$.

Untuk $n = 10k+1$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{(10k+1)(10k+2)}{2}$$
$$= 5K+3$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ tidak habis dibagi 5 untuk $n = 10k+1$.

Untuk $n = 10k+2$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} 13i = 13\frac{n(n+1)}{2} = 13\frac{(10k+2)(10k+3)}{2}$$
$$= 5K+4$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n} 13i$ tidak habis dibagi 5 untuk $n = 10k+2$.

Selanjutnya untuk $n = 10k + 3$, $10k + 4$, $10k + 5, \ldots,$ $10k + 9$ dapat dibuktikan dengan cara yang sama sehingga dapat disimpulkan $5 \mid \sum_{i=1}^{n} 13i$ untuk $n = 10k$, $10k + 4$, $10k + 5$, dan $10k + 9$ dengan $k \geq 0$.

Cara lain untuk menganilis sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 adalah dengan cara mendaftarkan sisa pembagiannya kedalam bentuk tabel. Cara ini bagus sebagai pembelajaran. Berikut ini adalah sisa dari $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ dibagi oleh 3 untuk n = 1,2,3,…,10 dan m=1,2,3,.. 12 terlihat pada tabel 1 berikut:

Tabel 1. Sisa Pembagian Tiga

m	***n***									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
2	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
4	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
6	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1
7	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
8	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
10	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1
11	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
12	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1

Perhatikan bahwa kolom 8 dan 9 mempunyai angka terakhir 0. Jadi, untuk $n = 9r$ atau $n = 9r - 1$ dimana $r \geq 1$ maka 3 dapat membagi barisan bilangan tersebut seperti dilambangkan sebagai berikut:

$$3 \mid \sum_{i=1}^{n}(13i)^m \quad \text{untuk } n = 9r \text{ atau } n = 9r - 1$$

Selanjutnya ini adalah sisa dari $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ dibagi oleh 5 untuk $n = 1,2,3, \ldots, 10$ dan $m = 1,2,3, \ldots 12$ terlihat pada tabel 2 berikut:

Tabel 2. Sisa Pembagian Lima

m	***n***									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	3	4	3	0	0	3	4	3	0	0
2	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0
3	2	3	2	0	0	2	3	2	0	0
4	1	2	3	4	4	0	1	2	3	3
5	3	4	3	0	0	3	4	3	0	0
6	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0
7	2	3	2	0	0	2	3	2	0	0
8	1	2	3	4	4	0	1	2	3	3
9	3	4	3	0	0	3	4	3	0	0
10	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0
11	2	3	2	0	0	2	3	2	0	0
12	1	2	3	4	4	0	1	2	3	3

Perhatikan bahwa kolom 4, 5, 9 dan 10 mempunyai angka terakhir 0 jika dan hanya jika $m \neq 0 \ (mod\ 4)$. Jadi, untuk $n = 5r$ atau $n = 5r - 1$ dimana $r \geq 1$ maka 5 dapat membagi barisan bilangan tersebut seperti dilambangkan sebagai berikut:

$$5 \mid \sum_{i=1}^{n}(13i)^m \leftrightarrow m \neq 0 \ (mod\ 4)$$

untuk $n = 5r$ atau $n = 5r - 1$

KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil yang diperoleh adalah $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ adalah karakteristik sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^{n}(13i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 sebagai berikut:

$$3 \mid \sum_{i=1}^{n}(13i)^m \text{ untuk } n = 9r \text{ atau } n = 9r - 1$$

$$5 \mid \sum_{i=1}^{n}(13i)^m \leftrightarrow m \neq 0 \ (mod\ 4) \text{ untuk } n = 5r \text{ atau } n = 5r - 1$$

Bagi pembaca yang tertarik dengan tulisan ini, disarankan agar membahas tentang analisis sisa pembagian $\sum_{i=1}^{n}(17i)^m$, $\sum_{i=1}^{n}(19i)^m$, $\sum_{i=1}^{n}(23i)^m$ atau bilangan prima yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

A. G. Aksoy & M. A. Khamsi. (2010). A Problem Book in Real Analysis, Springer, New York.

Baker A. (1984). The Theory of Numbers, Cambridge University Press, Cambridge.

Burton D.M. (2010). Elementary Number Theory, Seventh Edition, University of New Hampshire, Durham.

Clark W. E. (2003). Elementary Number Theory, Department of Mathematics University of South Florida, Florida.

Gulliver T.A. (2010). Divisibility of Sums of Powers of Even Integers, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **64**; 191-198.

Gulliver T.A. (2010). Divisibility of Sums of Powers of Odd Integers, International Mathematical Forum, **5**; 3059-3066.

Gulliver T.A. (2012). Sums of Powers of Intengers Divisible by Three, International Journal Contemp. Math. Sciences, **7**; 1895-1901.

Irawati, A., Sarindat, E., Pratikno, dan Ardana, W.B. (2008). Mahir Matematika untuk SMK (Non Teknik) kelas IX. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional Jakarta.

Koshy T.(2007). Elementary Number Theory with Aplications Second Edition, Academic Press, London.

Mashadi & Abdul Hadi. (2017). Analisis I, UR Press, Pekanbaru.

M. H. Potter. (1998). Basic Element of Real Analysis, Springer-Verlag, New York.

Stark H.M.(1998). An Introduction to Number Theory, Markham Publishing Company, Chicago.

Suprijanto D. (2015). Observation on Sums of Powers of Intengers Divisible by Five, Applied Mathematical Sciences, **9**; 3679 – 3686.

Suprijanto D. dan Rusliansyah (2014). Observation on Sums of Powers of Intengers Divisible by Four, Applied Mathematical Sciences, **8**; 2219 – 2226.