ALGORITMA PERKALIAN TANGGA DAN APLIKASI BENTUK TRINOMIAL PADA PEMANGKATAN BILANGAN TIGA DIGIT

Jufri[1)], Hera Deswita[2)]
[1)]Program Studi Teknik Informatika
[2)]Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Pasir Pengaraian
Jl. Tuanku Tambusai, Rambah Hilir, Kabupaten Rokan Hulu
jufrirokan@gmail.com, heraiwit@gmail.com

Abstrak : *Artikel ini membahas perumuman perkalian tangga yang awalnya diterapkan pada koefisien binomial dan koefisien trinomial. Perumuman ini akan membentuk suatu algoritma. Selanjutnya artikel ini juga membahas aplikasi bentuk trinomial pada pemangkatan bilangan tiga digit.*

Kata Kunci: Perkalian Tangga, trinomial

Abstrak : *This article discusses the generalization of multiplication staircase that originally applied to the binomial coefficients and coefficients trinomial. This generalization will form an algorithm. Furthermore, this article also discusses the application of trinomial forms in the appointment of three-digit numbers.*

Kata Kunci: *multiplication of stairs, trinomial*

PENDAHULUAN

Koefisien multinomial merupakan bentuk umum dari bentuk mono, binomial, trinomial dan seterusnya. Dalam menentukan atau mencari nilai-nilai koefisien multinomial terutama bentuk binomial atau trinomial, dapat dilakukan dengan menggunakan aturan kombinasi.

Segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Dalam Harris et al. [1] disebutkan bahwa bentuk susunan segitiga ini muncul dalam tulisan Blaise Pascal yang berjudul Traite du triangle arithmetique tahun 1654. Selain membantu dalam ekspansi aljabar dua variabel, aplikasi dari koefisien binomial sudah banyak diterapkan dalam berbagai bidang mulai dari permasalahan yang sederhana sampai yang dipandang rumit.

Munadi [2] menerapkan rumus binomial pada perpangkatan bilangan bulat dua digit. Selanjutnya segitiga Pascal juga telah diperluas, dengan memodifikasi koefisien binomial $(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$ untuk bilangan *n* bilangan bulat.

James [3] menuliskan bentuk umum trinomial sebagai.

$$(a + b + c)^p = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{m} \binom{p}{m} \binom{m}{n} a^{p-m} b^n c^{m-n} \tag{1}$$

dengan $\binom{p}{m}\binom{m}{n}$ adalah koefisien trinomial.

Koefisien trinomial adalah koefisien yang diperoleh dari ekspansi bentuk $(a + b + c)^n$. Untuk mendapatkan koefisien trinomial, Michael [4] melakukan perkalian dengan membalik posisi salah satu faktor dari $(x+y)^n$, kemudian digeneralisasi untuk koefisien trinomial dan koefisien quadrinomial. Oscar [6] mengkonstruksi koefisien trinomial pada segitiga Pascal, dengan sebuah segitiga Pascal memuat koefisien dari $(a+b+c)^n$. Selanjutnya Miller [5] menyusun segitiga Pascal yang memuat koefisien trinomial menjadi limas Pascal yang berlapis-lapis. Lapisan-lapisan pada limas Pascal berbentuk segitiga yang di dalamnya berisi koefisien trinomial pangkat *n*. Misalkan lapisan ke 5 dari limas Pascal, berarti lapisan tersebut merupakan lapisan yang memuat koefisien $(a+b+c)^5$.

Metode lain untuk menentukan koefisien trinomial adalah metode yang dilakukan oleh Michael [4], yakni dengan mengalikan koefisien $(x+y)^n$ dengan segitiga Pascal binomial pangkat *n*. Misalnya ingin menentukan koefisien $(a+b+c)^3$, maka dilakukan perkalian koefisien $(a+b)^3$ dengan segitiga Pascal binomial *n* = 3 sebagai berikut.

Koefisien $(a+b)^3$		Segitiga pascal $n=3$		$(a+b+c)^3$
$\mathbf{1}$		$(\mathbf{1})$		$(\mathbf{1})$
$\mathbf{3}$	$\times$	$(\mathbf{1}+\mathbf{1})$	$=$	$(\mathbf{3}+\mathbf{3})$
$\mathbf{3}$		$(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{1})$		$(\mathbf{3}+\mathbf{6}+\mathbf{3})$
$\mathbf{1}$		$(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{1})$		$(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{1})$

Selain itu, Jufri [7] telah melakukan perkalian tangga untuk menetukan koefisien trinomial. Namun aturan perkalian tangga tersebut belum diperumum untuk koefisien multinomial. Tujuan penulisan artikel ini adalah untuk memperumum perkalian tangga pada koefisien multinomial serta aplikasi bentuk trinomial pada perpangkatan bilangan tiga digit.

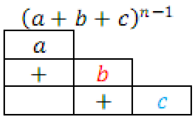
TINJAUAN PUSTAKA

Koefisien multinomial merupakan perumuman dari teorema binomial dengan variabel lebih dari dua. Misalkan variabel-varibel $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ sehingga koefisien multinomial dapat didefinisikan pada Definisi 1.

Definisi 1 [2]. Misalkan $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ dengan $n, n_1, n_2, \dots n_k$ bilangan bulat nonnegarif maka didefinisikan $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots,} = \frac{n}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k}$. Bilangan $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots,}$ disebut koefisien multinomial.

Metode perkalian tangga [7] untuk menentukan koefisien trinomial dilakukan sebagai berikut.:

1. Tulis $(a+b+c)^n = (a+b+c)(a+b+c)^{n-1}$. Tetapkan $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $(a+b+c)^{n-1}$ sebagai objek yang menggunakan tangga sebagai mana Gambar 1.

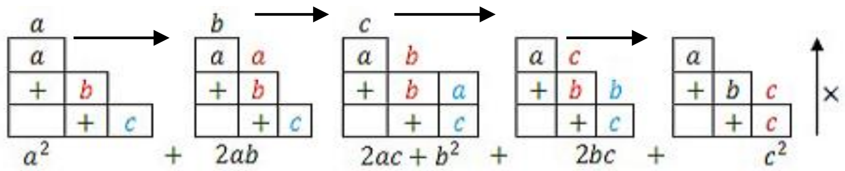


Gambar 1. Suku-suku $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $(a+b+c)^{n-1}$ sebagai pengguna tangga

2. Suku-suku $(a+b+c)^{n-1}$ berjalan pada anak tangga dari atas ke bawah dengan berjalan maju. Artinya suku yang berjalan terlebih dahulu adalah suku pertama, diikuti oleh suku ke dua, suku ke tiga dan seterusnya.
3. Kalikan suku-suku $(a+b+c)^{n-1}$ dengan anak tangga tempat posisi berada. Misalnya suku pertama $(a+b+c)^{n-1}$ adalah *a* berada pada anak tangga *b*, maka suku pertama tersebut dikalikan dengan *b* yaitu $a \times b = ab$. Kemudian lakukan penjumlahan biasa.

Berikut diberikan beberapa contoh menentukan koefisien trinomial dengan perkalian tangga.

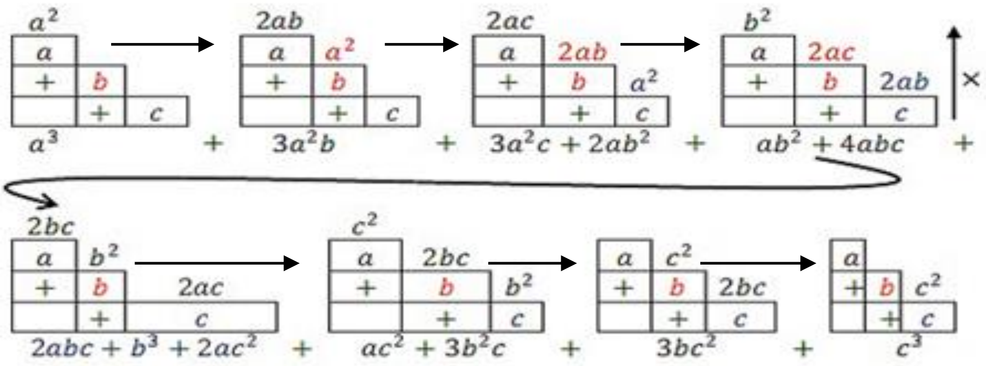
Contoh 1. Diberikan $(a+b+c)^2$, akan ditentukan koefisien $(a+b+c)^2$ dengan cara perkalian model anak tangga. Tulis $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$. Tetapkan $(a+b+c)$ yang pertama sebagai anak tangga dan $(a+b+c)$ yang kedua sebagai pengguna tangga. Variabel *a, b, c* pada $(a+b+c)$ sebagai pengguna tangga diurutkan sebagai suku pertama adalah *a*, suku kedua adalah *b* dan suku ketiga adalah *c*. Pengguna tangga mulai menuruni tangga dari *a* diikuti *b* dan *c*. Kalikan *a, b, c* dengan anak tangga tempat *a, b, c* berada, yaitu $(a \times a)$, $(b \times a)$, $(a \times b)$, ..., $(c \times c)$. Ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Menentukan koefisien $(a+b+c)^2$ dengan perkalian model anak tangga

Dari Gambar 2 diperoleh $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$dengan koefisiennya adalah 1, 2, 2, 1, 2, 1.

Contoh 2. Dengan memanfaatkan hasil pada contoh 1, akan ditentukan koefisien $(a+b+c)^3$ dengan menggunakan perkalian model anak tangga. Tetapkan $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ sebagai pengguna tangga. Dengan menerapkan langkah-langkah perkalian model anak tangga, ilustrasi ekspansi $(a+b+c)^3$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Menentukan koefisien $(a+b+c)^3$ dengan perkalian model anak tangga

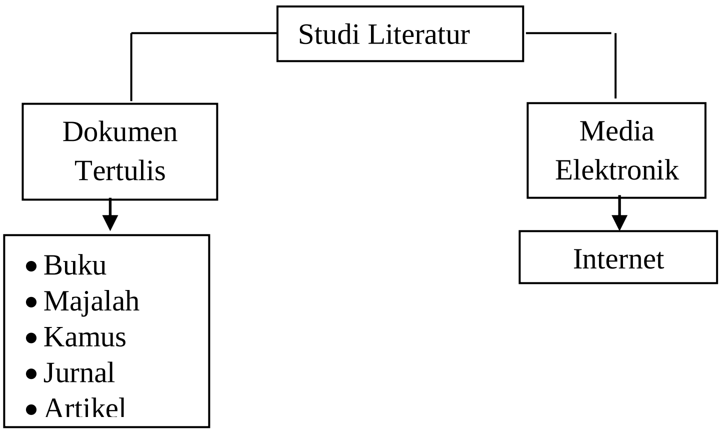
Dari Gambar 3 diperoleh:

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 2ab^2 + ab^2 + 4abc + 2abc + b^3 + 2ac^2 + ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \quad = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

dengan koefisien $(a+b+c)^3$ adalah 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 3, 3, 1.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah studi literatur untuk mencari metode alternatif dalam menentukan koefisien trinomial. Studi literatur merupakan suatu teknik pengumpulan data dengan menghimpun dan menganalisis dokumen-dokumen, baik dokumen tertulis, gambar maupun elektronik. Berikut ini adalah bagan studi literatur yang penulis lakukan dalam penelitian ini.



Ganbar 1. Metode Penelitian Studi literatur

1. Tahap persiapan

   Pada tahap ini penulis mengumpulkan dan mempelajari buku-buku literatur yang berhubungan dengan koefisien trinomial dan perkalian tangga, melakukan pencarian data melalui media internet, mengumpulkan teori-teori yang membahas koefisien trinomial dan perkalian tangga.
2. Tahap Pelaksanaan

Pada tahap ini penulis melakukan ekpsperimen-eksperimen untuk menentukan perumuman perkalian tangga dengan teori-teori yang sudah ada.

3. Tahap selanjutnya menyusun laporan penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma Perkalian Tangga untuk Menentuka Koefisien Multinomial

Merujuk pada aturan menentukan koefisien trinomial dengan perkalian tangga, maka aturan tersebut dapat diperumum untuk koefisien multinomial. Perumuman ini dapat dijadikan algoritma sebagai berikut:

1. Mulai
2. Tulis$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^n = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^{n-1}$. Tetapkan $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$ sebagai anak tangga dan $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^{n-1}$ sebagai objek yang menggunakan tangga.
3. Suku-suku $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^{n-1}$ berjalan pada anak tangga dari atas ke bawah dengan berjalan maju. Artinya suku yang berjalan terlebih dahulu adalah suku pertama, diikuti oleh suku ke dua, suku ke tiga dan seterusnya.
4. Kalikan suku-suku $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^{n-1}$ dengan anak tangga tempat posisi berada. Misalnya suku pertama $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)^{n-1}$ adalah x_1 berada pada anak tangga x_2, maka suku pertama tersebut dikalikan dengan x_2 yaitu $x_1 \times x_2 = x_1 x_2$.
5. Kemudian lakukan penjumlahan biasa.
6. Selesai

Aplikasi Bentuk Trinomial Pada Pemangkatan Bilangan Tiga Digit

Jika binomial $(x + y)$ dengan x dan y variabel real yang tidak nol dipangkatkan n, dengan n bilangan asli, maka akan diperoleh bentuk $(x + y)^n$ yang dijabarkan dalam Rumus Binomial Newton. Munadi [2] mengaplikasikan rumus binomial pada pemangkatan bilangan dua digit. Kemudian menyarankan untuk memperluas bentuk binomial untuk pemangkatan bilangan lebih dua digit. Mengikuti saran dari Munadi, maka pada bagian ini akan dibahas aplikasi rumus trinomial pada pemangkatan bilangan tiga digit.

Diberikan tiga bilangan bulat nonnegatif **a, b,** dan **c** yang membentuk bilangan tiga digit **a b c** dengan **a** sebagai ratusan, **b** sebagai puluhan dan **c** sebagai satuan. Diperoleh bahwa:

$(\boldsymbol{abc})^1 = 100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{abc})^2 = (100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2$

$\quad = 10.000\boldsymbol{a^2} + 2.000\boldsymbol{ab} + 200\boldsymbol{ac} + 100\boldsymbol{b^2} + 20\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{c^2}$

$(\boldsymbol{abc})^3 = 1.000.000\boldsymbol{a^3} + 300.000\boldsymbol{a^2b} + 30.000\boldsymbol{a^2c} + 30.000\boldsymbol{ab^2} + 6.000\boldsymbol{abc} +$

$$1.000\boldsymbol{b}^3 + 300\boldsymbol{ac}^2 + 300\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c} + 30\boldsymbol{bc}^2 + \boldsymbol{c}^3$$

Contoh Kasus:

1. $(999)^2 = 10.000(9)^2 + 2.000(9)(9) + 200(9)(9) + 100(9)^2 + 20(9)(9) + (9)^2$
   $= 998.001$
2. $(751)^2 = 10.000(7)^2 + 2.000(7)(5) + 200(7)(1) + 100(5) + 20(5)(1) + (1)^2$
   $= 564.001$

SIMPULAN DAN SARAN

Adapun kesimpulan dari artikel ini adalah:

1. Perkalian tangga yang biasa diterapkan untuk mencari koefisien binomial atau trinomial dapat diperumum untuk koefisien multinomial.
2. Bentuk trinomial dapat diterapkan untuk perpangkatan bilangan tiga digit.

Disaran untuk kelanjutan pada penelitian ini untuk dapat dilanjutkan pada koefisien quadrinomial dan seterunya serta dicari aplikasinya untuk pembelajaran.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung oleh Fakultas Ilmu Komputer Universitas Pasir Pengaraian dan Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Pasir Pengaraian serta dibiayai oleh Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi melalui Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jendral Penguatan Riset dan Pengambangan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. M. Harris, J.L. Hirs dan M.J. Mossingholtf. 2008. *Combinatorics and Graph Theory*. New York: Springer.

[2] Munadi, 2011. Aplikasi Rumus Binomial Newton pada Pemangkatan Bilangan Bulat Dua Digit, prosiding Matematika dan Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran, A-13(2011), 126-129, FMIPA UNY, Yogyakarta, 2011.

[3] James, C., The Trinomial Triangle, *The College Mathematics Journal*, 30(2), 1999, pp. 141-142.

[4] Michael, A. K., Generalization's of Pascal's Triangle: A Construction Based Approach, *Thesis*, Department of Mathematical Sciences, College of Sciences The Graduate College, University of Nevada, Las Vegas, 2011.

[5] Miller, S., Recursions Associated With Pascal's Pyramid. University Oklahoma. *PI MU EPSILON*, *Journal*, 4(10), 1969, pp. 417-422.

[6] Oscar, W., Proof and Applications of the Multinomial Theorem and its Relationship with Combinatorics, *Extended Essay- Mathematics*, Chinese International School, 2011.

[7] Jufri, Sri Gemawati, and M. D. H. Gamal. "Alternatif Menentukan Koefisien Trinomial dengan Perkalian Model Anak Tangga dan Modifikasi Perkalian Bersusun." *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 1.1 (2015): 48-51.