

# MODEL MATEMATIKA DENGAN SYARAT BATAS DAN ANALISA ALIRAN FLUIDA KONVEKSI BEBAS PADA PELAT HORIZONTAL

Leli Deswita<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau  
Email: deswital@yahoo.com

## ABSTRACT

In this paper, *study the mathematical model of fluid flow free convection on a horizontal plate. Newton's mathematical model of fluid flow using Navier Stokes equations consisting of the continuity equation, momentum equation and energy equation. Navier Stokes equation in the form of system of nonlinear partial differential equations of order two dimensional. So on this equation is derived in advance to form a dimensionless equations, then be changed to form the system of nonlinear ordinary differential equations, using similarity transformation. System of nonlinear ordinary differential equations that is, solved by using Finite-Difference Schem, and also with Mathematics program using matlab softwer. Completion numerically obtained for the problem of fluid flow within the fluid viscosity Newton lamina not compressible (incompressible viscous fluid flow) in the heat transfer plate horizontally. The results obtained from this program to determine the velocity profiles and a temperature profiles.*

**Keywords:** *Boundary layer, free convection, fluid flow, horizontal plate, similarity solutions*

## 1. PENDAHULUAN

Benda dikenal dalam keadaan padat, cair atau gas (atau uap). Apabila benda berada dalam bentuk cair atau gas, benda disebut sebagai fluida. Sifat-sifat umum dari semua fluida adalah harus dibatasi dengan dinding kedap supaya tetap dalam bentuknya semula. Apabila dinding pengekan dipindahkan, fluida mengalir (mengembang) sampai pembatas baru yang kedap ditemukan. Menurut ilmu mekanika fluida, aliran fluida khususnya air di klasifikasikan berdasarkan perbandingan antara gaya-gaya inersia (inertial forces) dengan gaya-gaya akibat kekentalannya (viscous forces). Fluida-fluida yang tegangan gesernya berhubungan secara linear terhadap laju regangan geser (gradient kecepatan) disebut juga fluida Newtonian. Pada penelitian ini konsep utama yang harus dipahami adalah masalah pengembangan/ pembentukan syarat batas (boundary condition). Pembentukan syarat batas terhadap pelat

horizontal adalah perlu dilakukan untuk menentukan pengaruh daya apung yang disebabkan oleh perbedaan suhu pelat dengan suhu fluida. Konsep seperti itu telah dikembangkan [2] dan [3] dalam penelitian tentang solusi kesamaan untuk syarat batas aliran konveksi campuran

pada pelat horizontal *permeable* (similarity solution for mixed convection of boundary laminar flow on permeable horizontal plate). Begitu juga dengan penelitian-penelitian yang telah dilakukan [1] dan [4]. Para peneliti menghasilkan beberapa yang penting seperti parameter apungan, parameter mikroktub dan bilangan Prandtl dengan dua solusi.

## 2. FORMULASI MATEMATIKA

Di atas telah dibicarakan bahwa penelitian ini menggunakan persamaan Navier Stokes, adapun

bentuk dasar dari persamaan Navier Stoke ini adalah dapat diberikan dalam bentuk vektor-vektor yang merupakan suatu gambaran matematis yang lengkap yang dapat diuraikan sebagai berikut:

Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0.$$

Persamaan Momentum

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{V} + \bar{F}_1.$$

Persamaan Tenaga

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{T} = \alpha \nabla^2 \bar{T}.$$

Persamaan Navier Stokes ini di rubah kebentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinear dengan masalah aliran fluida dengan syarat batas konveksi bebas pada pelat horizontal yang dipanaskan, adapun bentuk model matematikanya dapat di tulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad 1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad 2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + g\beta(\bar{T} - T_\infty) \quad 3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad 4)$$

Dengan syarat batas,

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_w(\bar{x}) \quad \text{pada} \\ \bar{y} = 0, \\ \bar{u} = 0, \quad \bar{T} = T_\infty, \quad \bar{p} = p_\infty, \quad \text{apabila} \\ \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan (1)-(4) dan syarat batas (5) dengan menggunakan parameter-parameter di bawah ini:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/L, \quad y = Gr^{1/5}(\bar{y}/L), \\ u &= Gr^{-2/5}(L/\nu)\bar{u}, \quad v = Gr^{-1/5}(L/\nu)\bar{v}, \\ \bar{T} &= T_\infty + \Delta\bar{T}T \\ p &= Gr^{-4/5}(\bar{p} - p_\infty)/(\rho\nu^2/L^2), \end{aligned}$$

Dengan  $Gr = g\beta(T_w - T_\infty)L^3/\nu^2$  adalah nomor Grashof dan  $\Delta\bar{T} = T_w - T_\infty$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 7)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + T = 0 \quad 8)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad 9)$$

Dengan syarat batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad T = T_w(x) = x^m \\ \text{pada } y = 0. \\ u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0, \\ \text{di } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Dimana  $x$  dan  $y$  adalah koordinat sepanjang pelat dan  $u$  dan  $v$  adalah komponen kecepatan dalam arah  $x$  dan  $y$  masing-masing, sedangkan  $\rho$  adalah tekanan fluida,  $T$  adalah temperatur fluida dan  $Pr$  adalah nomor Prandtl.

Persamaan similarity transformation dalam bentuk [1].

$$\begin{aligned} \psi &= x^{(m+3)/5} f(\eta), \quad T = x^m \theta(\eta), \\ p &= x^{(4m+2)/5} h(\eta), \quad \eta = yx^{(m-2)/5}. \end{aligned} \quad 11)$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi stream yang didefinisikan sebagai berikut:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (12)$$

Persamaan (11) disubstitusikan ke dalam persamaan (12), selanjutnya dimasukkan kedalam persamaan (7)–(9), kemudian diperoleh persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$5f''' + (m+3)ff'' - (2m+1)(f')^2 - (4m+2)h - (m-2)\eta h' = 0, \quad (13)$$

$$h' = \theta, \quad (14)$$

$$\frac{5}{Pr} \theta'' + (m+3)f\theta' - (5m)f'\theta = 0. \quad (15)$$

Syarat batas (10) menjadi

$$\begin{aligned} f'(0) = 0, & \quad f(0) = 0, & \quad \theta(0) = 1 \\ f'(\infty) = 0, & \quad \theta(\infty) = 0, & \quad h(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Kuantitas fisika dalam penelitian ini adalah koefisien gesekan kulit  $C_f$  dan koefisien pemindahan panas  $Q_w$  terhadap plat yang didefinisikan oleh [5] sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_f &= x^{(3m-1)/5} f''(0), \\ Q_w &= x^{2(3m-1)/5} [-\theta'(0)]. \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan (13)–(15) dengan syarat batas (16) diselesaikan secara numerik untuk beberapa nilai  $Pr$  dan  $m$  ( $\geq 0$ ) dengan menggunakan metoda *finite difference schem* seperti yang telah

dijelaskan dalam [5]. Nilai-nilai koefisien pemindahan panas yang ditunjukkan dalam Tabel 1 untuk beberapa nilai dari  $Pr$  dan  $m = 0$  (plat isothermal). Nilai yang dilaporkan oleh Lin *et al.* [6] untuk nilai  $Pr = 1$  juga termasuk dalam tabel ini, dan hasil perbandingan adalah sangat baik`

Pada Tabel 1 dapat dilihat, bahwa koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  meningkat apabila  $Pr$  meningkat, apabila nomor Prandtl meningkat maka konduktivitas termal lebih rendah atau viskositas yang lebih tinggi dan karenanya pemindahan panas meningkat pada permukaan. Kemudian pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai-nilai koefisien gesekan kulit  $f''(0)$  dan koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  untuk beberapa nilai  $m$  dan  $Pr = 1$ . Pada Tabel 2 apabila nilai  $m$  meningkat dapat dilihat bahwa nilai-nilai koefisien gesekan kulit  $f''(0)$  meningkat, untuk nilai koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  bila  $m$  meningkat maka nilai-nilai koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  meningkat. Selanjutnya pada Tabel 3 untuk nilai koefisien gesekan kulit  $f''(0)$  dan koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  untuk beberapa nilai  $Pr$  dan  $m = 2$ . Didapati bahwa nilai  $Pr$  meningkat, koefisien gesekan kulit  $f''(0)$  menurun, yaitu pertambahan nilai  $Pr$  akan meningkatkan viskositas fluida dan memperlambat kelajuan aliran. Selanjutnya, nilai  $Pr$  meningkat, koefisien pemindahan panas  $-\theta'(0)$  juga meningkat, artinya pertambahan

nilai  $Pr$  meningkatkan kadar pemindahan panas, dapat dilihat pada Tabel 3

**Table 1. Nilai  $-\theta'(0)$  untuk beberapa nilai  $Pr$  apabila  $m = 0$**

Pr	Kajian Ini	Lin et al. (1989)	Raju et al. (1989)
0.1	0.1964		
0.7	0.3545		
1	0.3905	0.3905	0.3881
7	0.6300		
10	0.6833		
100	1.1224		

**Table 2. Nilai  $f''(0)$  dan  $-\theta'(0)$  untuk beberapa nilai  $m$  dan  $Pr = 0.7$**

m	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0	0.9876	0.3543
2	1.0811	0.8129
6	1.2945	1.2083
10	1.4220	1.4692
15	1.5357	1.7203
20	1.6233	1.9259

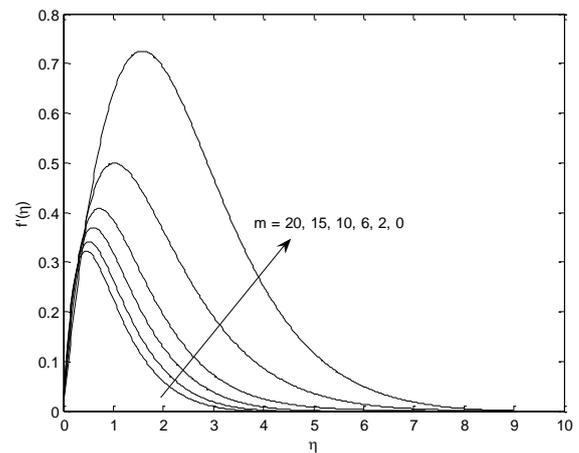
**Table 3. Nilai dan  $-\theta'(0)$  untuk beberapa Nilai  $Pr$  dan  $m = 2$**

Pr	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0.1	2.7340	0.4436
0.7	1.2525	0.7481
1.00	1.0811	0.8129
10	0.4259	1.3464
100	0.1703	2.1710

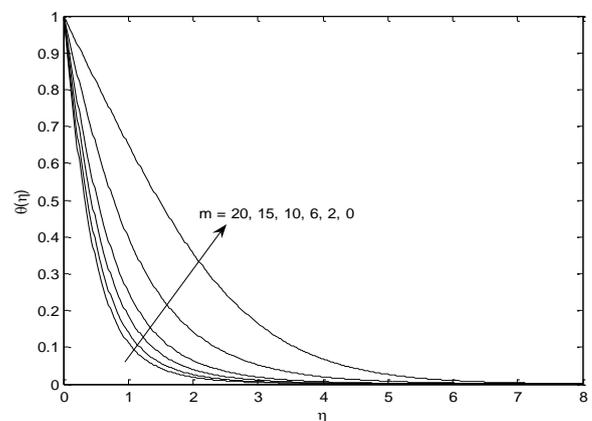
. Profil kecepatan  $f'(\eta)$  untuk nilai  $m$  meningkat apabila  $Pr = 0.7$  disajikan pada Gambar 1. Gambar

tersebut menunjukkan apabila nilai  $m$  meningkat didapati bahawa profil kcepatan berkurang. Selanjutnya, profil suhu dalam Gambar 2, menunjukkan bahawa gradien suhu di permukaan meningkat dengan meningkatnya  $m$ , dan keputusan ini sesuai dengan ditunjukkan dalam Tabel 2.

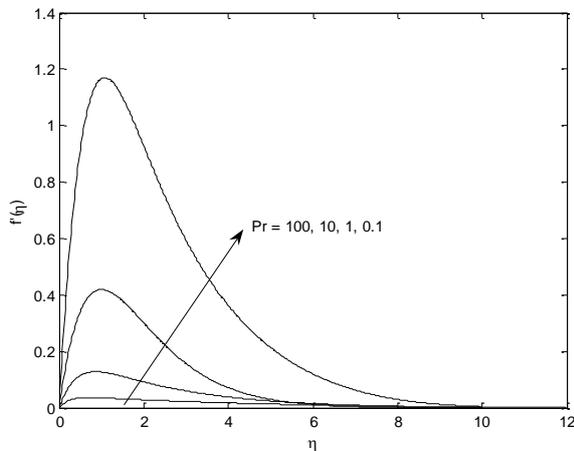
Selanjutnya Profil kcepatan  $f'(\eta)$  untuk nilai  $Pr$  meningkat apabila  $m = 6$  disajikan pada Gambar 3. Gambar tersebut menunjukkan apabila nilai  $Pr$  meningkat didapati bahawa profil kcepatan berkurang. Selanjutnya, profil suhu dalam Gambar 4, menunjukkan bahawa gradien suhu di permukaan meningkat dengan meningkatnya  $Pr$ , dan keputusan ini sesuai dengan ditunjukkan dalam Tabel 3.



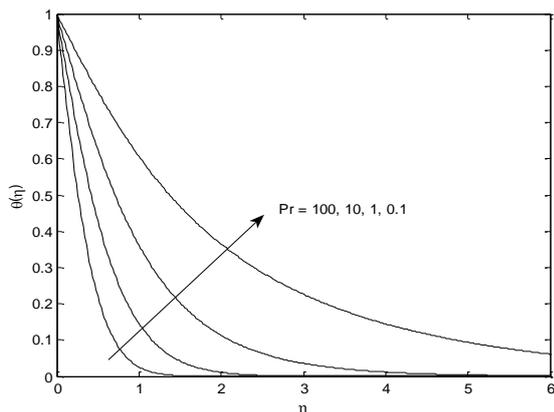
Gambar 1. Profil Kcepatan (Velocity Profiles)  $f'(\eta)$  Untuk Beberapa Nilai  $m$  Apabila  $Pr = 0.7$



Gambar 2. Profil Suhu (Temperature Profiles)  $-\theta(\eta)$  Untuk Beberapa Nilai  $m$  Apabila  $Pr = .0.7$



Gambar 3. Profil Kecepatan (Velocity Profiles)  $f''(\eta)$  Untuk Beberapa Nilai  $Pr$  Apabila  $m = 6$ .



Gambar 4. Profil Suhu (Temperature Profiles)  $-\theta(\eta)$  Untuk Beberapa Nilai  $Pr$  Apabila  $m = 6$

#### 4. KESIMPULAN.

Model matematika dengan syarat batas aliran fluida konveksi bebas pada pelat horizontal telah dipelajari dan dipahami secara teoritis. Permasalahan ini telah diselesaikan secara numerik, dengan menggunakan metoda *finite difference schem* dan juga dengan program matematika dengan menggunakan softwer Matlab. Hasil yang diperoleh

nilai-nilai  $Pr$  dan konstanta  $m$  yang berbeda terhadap profil kecepatan, dan profil suhu. Hasil secara numerik telah diperoleh dan ternyata bahwa pemindahan panas  $-\theta(\eta)$  meningkat apabila  $Pr$  meningkat.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Chen, T.S., Tien H.C. & Armaly, B.F.** 1986. Natural convection on horizontal, inclined, and vertical plates with variable surface temperature or heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 97, 1986, pp. 1465-1478.
- Deswita, L., Nazar. R., Ishak. A., Ahmad. R. & Pop. I.** Similarity solution : for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat. plate. *Applied Mathematics and Computation* , vol. 217, 2010, pp. 2619-2630.
- Deswita, L., Nazar. R., Ishak. A., Ahmad. R. & Pop. I.** Mixed boundary layer flow past a wedge with permeable walls. *Heat Mass Transfer* vol. 46, 2010, pp. 1013-1018.
- Ishak, A., Nazar, R. & Pop, I.** 2007. The boundary layer on a moving wall with Terbaik," in *Forum Statistika dan Komputasi*, vol. 14, 2009, pp. 1-7.
- Keller, H.B.** A new difference scheme for parabolic problems. Dalam Bramble, J *Numerical Solutions of Partical Defferential Equations.* New York. Achademic Press.1970.
- Lin H,-T. & Yu W,-S & Yang S.-L.** *Free convection on an arbitrarily incilined plate with uniform surface heat flux* .*Warme-und Stoffilbertr*, vol. 24, 1989, pp. 183-190